Direction des ressources humaines

Sous-direction des compétences
Bureau de la formation

TEST POUR LE FINANCEMENT DE LA PREPARATION AU CONCOURS INTERNE D'ELEVE INGENIEUR À l'EIVP

RENTRÉE SEPTEMBRE 2026

Mardi 12 Mai 2026

Épreuve de Mathématiques

Durée de l'épreuve **: 3h00**

Épreuve notée sur 20

Coefficient 3

Du papier brouillon est à votre disposition. Son usage vous est personnel. Aucun brouillon ne pourra être remis en fin d'épreuve en lieu et place d'une copie.

Test d'admission : Maths (3h)

Mai 2026

- Ce devoir est composé de 5 exercices **indépendants**. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- **Changer de page** au début de chaque exercice.
- Penser à **numéroter** les copies.
- L'argumentation des réponses devra être **précise**, **concise** et **rigoureuse**.
- Les résultats littéraux et numériques demandés par l'énoncé seront **encadrés**

"If you **can't** explain an idea **simply**, you **haven't** yet understood it **yourself** "

- Richard Feynman -

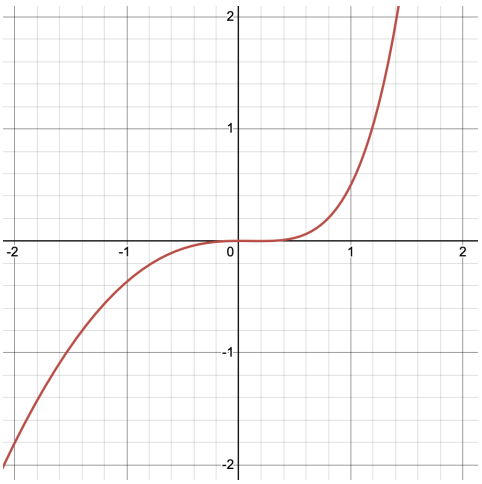
- Calculatrice autorisée -

I ANALYSE DE FONCTION

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

Le graphique de $\mathcal{C}_f$ ci-contre est la courbe représentative de cette fonction f telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



I.1 Conjecture (sans justification)

A l'observation de cette courbe, quelles conjectures pourrait on faire concernant :

1. Le sens de variations de f sur $[-2 : 2]$?
2. La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses (Ox) ?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

I.2 Contrôle de la première conjecture

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$
   (a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
   (b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   (c) En déduire le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.
   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que $0,20 < \alpha < 0,21$.
   (e) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = xg(x)$.
   (b) Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (c) En déduire le sens de variations de la fonction f.
   (d) Que dire de la première conjecture ?

I.3 Contrôle de la deuxième conjecture

On se propose de contrôler la position de cette courbe par rapport à l'axe (Ox).

5. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
6. En déduire le signe de $f(\alpha)$.
7. En reprenant le tableau de variations de f, que dire alors de la deuxième conjecture ?

II SUITES NUMERIQUES

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$

1. Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4. Quelle conjecture peut on faire ?
2. On cherche le sens de variation et la limite de la suite v_n
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$
   (b) Démontrer par réccurence que $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n < 3$
   (c) En déduire le sens de variation de (v_n).
   (d) Montrer que (v_n) converge et calculer sa limite ℓ.
3. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$
   (a) Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$ et dont on précisera son premier terme.
   (b) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (d) Calculer v_{10}.

III PROBABILITÉS

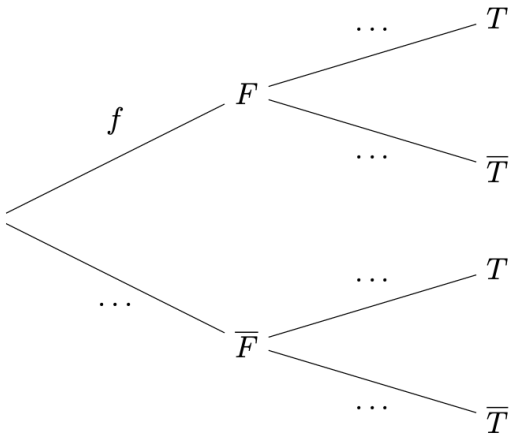
Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

III.1 Arbre pondéré

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'évènement "le membre choisi est une femme"
- T l'évènement "le membre choisi adhère à la section tennis"

1. On note $f = P(F)$ la probabilité de réaliser l'évènement F. Reproduire et compléter le schéma suivant :



2. Montrer que la probabilité de réaliser l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.
3. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
   Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

III.2 Loi binomiale

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

4. Rappeler la définition d'un schéma de bernouilli.
5. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
6. $\forall n > 0$, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   Montrer que $\forall n > 0$, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$
7. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.

IV GEOMETRIE DANS L'ESPACE

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère les points suivants :

- $A(0;4;1)$
- $B(1;3;0)$
- $C(2;-1;-2)$
- $D(7;-1;4)$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ $(2;-1;3)$.
   (a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   (d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit les deux plans suivants d'équations cartésiennes respectives :
   - $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 0$
   - $\mathcal{P}_2 : x + 4y + 2 = 0$

   (a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
   (b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = & -4t - 2 \\ y = & t \\ z = & 3t + 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   (c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ? Justifier.

V NOMBRES COMPLEXES

V.1 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

1. On note l'affixe $z_0 = i\sqrt{2}$: calculer $z_0^2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$ et $z_0^3 = \left(i\sqrt{2}\right)^3$

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) z - 2i\sqrt{2}$.

2. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
3. On souhaite factoriser le polynôme P
   (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

V.2 Plan complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.

4. On considère les points suivants :
   - A d'affixe $a = \sqrt{3} - i$
   - B d'affixe $b = \sqrt{3} + i$
   - C, le milieu du segment $[OB]$, d'affixe c.

   (a) Déterminer une forme exponentielle de a, b et c.
   (b) Faire une figure et placer les points A, B, et C.
   (c) Montrer que le triangle (OAB) est équilatéral (un raisonnement avec des nombres complexes est attendu)
5. On considère deux nouveaux points :
   - D tel que le triangle (OCD) est isocèle rectangle en O et $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
   - E tel que $DABE$ soit un parallélogramme.

   (a) Placer les points D et E sur la figure précédente.
   (b) Déterminer une forme exponentielle de l'affixe d du point D, puis sa forme algébrique.
   (c) Montrer que l'affixe e du point E est : $e = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{4 - \sqrt{3}}{2}\right) i$
   (d) Démontrer que $OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$