Épreuve de Mathématiques

Durée : **4 heures** – Aucun document autorisé
Calculatrices et téléphones interdits

Le sujet comporte quatre problèmes indépendants :

I. Suites définies par récurrence et points fixes

II. Puissance n-ième d'une matrice

III. Produit scalaire et polynômes orthogonaux

IV. Équation fonctionnelle intégrale

Les problèmes sont indépendants. Soignez la rédaction et justifiez toutes vos affirmations.

Problème I – Suites définies par récurrence et points fixes

Soit $f : I \to I$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle **point fixe** de f tout réel $\ell \in I$ vérifiant $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est **attractif** si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de ℓ et $|f'(\ell)| < 1$, et **répulsif** si $|f'(\ell)| > 1$.

Partie A – Exemples de convergence

A.1 – Convergence monotone

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0,1[, \qquad u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{où} \quad f(x) = 1 - e^{-x}.$$

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.

3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

A.2 – Convergence en colimaçon

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 = 2, \qquad v_{n+1} = g(v_n), \quad \text{où} \quad g(x) = \frac{1}{1+x}.$$

4. Montrer que g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Montrer que les suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante, encadrées entre $\frac{1}{3}$ et 2.

6. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

7. Représenter schématiquement la convergence en colimaçon.

Partie B – Points fixes attractifs et répulsifs

Soit $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $\ell \in I$ un point fixe de f.

8. Critère de convergence locale.
Montrer que si ℓ est attractif, il existe $\delta > 0$ et $k \in]0,1[$ tels que, pour tout $u_0 \in [\ell-\delta, \ell+\delta]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie

$$|u_n - \ell| \leq k^n \, |u_0 - \ell|$$

et converge donc vers ℓ.

9. Un exemple de points fixes répulsifs.
On pose $h(x) = 4x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. Déterminer les points fixes de h, calculer h' en chacun d'eux, et montrer qu'ils sont tous répulsifs. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = h(u_n)$ ne peut converger que si elle est stationnaire.

10. Retour sur la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On reprend $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(a) Calculer $g'(\ell)$ et vérifier que ℓ est attractif.

(b) Montrer que $|v_n - \ell| \leq k^n \, |v_0 - \ell|$ pour un certain $k \in]0,1[$ que l'on précisera, en appliquant le critère de la question 8.

(c) On pose $e_n = v_n - \ell$. Montrer d'abord que $e_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$, puis montrer que $e_{n+1} = g'(\ell)\, e_n + O(e_n^2)$, et en déduire que $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} \to g'(\ell)$.

Problème II – Puissance n-ième d'une matrice

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels, et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et 1 colonne. On identifie $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^3$: tout élément X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sera donc écrit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

On note I_3 la matrice identité 3×3.

Partie A – Un cas simple

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et A^3 directement par multiplication matricielle.

2. On cherche les scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, telle que $AX = \lambda X$.

(a) Montrer que λ est un tel scalaire si et seulement si $\det(A - \lambda I_3) = 0$.

(b) Calculer $\det(A - \lambda I_3)$ et trouver toutes les valeurs de λ solutions.

(c) Pour chacune de ces valeurs λ, résoudre le système $(A - \lambda I_3)X = 0$ et donner un vecteur colonne X non nul solution.

3. On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois valeurs trouvées, et V_1, V_2, V_3 les vecteurs colonne associés. Soit P la matrice 3×3 dont les colonnes sont V_1, V_2, V_3, et D la matrice dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (tous les autres coefficients étant nuls).

(a) Vérifier que $AP = PD$.

(b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(c) En déduire que $A = PDP^{-1}$, puis que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Expliciter D^n, puis calculer A^n.

(e) Vérifier le résultat pour $n = 2$ en comparant avec la question 1.

Partie B – Un cas plus délicat

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer $B - 3I_3$ et $(B - 3I_3)^2$.

5. Étude des noyaux itérés.

(a) Résoudre le système $(B - 3I_3)X = 0$. Quelle est la dimension de l'ensemble des solutions ?

(b) Résoudre le système $(B - 3I_3)^2X = 0$. Quelle est la dimension de l'ensemble des solutions ?

(c) Résoudre le système $(B - 2I_3)X = 0$. Donner un vecteur colonne $e_3 \neq 0$ solution.

(d) On pose $E_1 = \ker(B - 3I_3)^2$ et $E_2 = \ker(B - 2I_3)$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ en montrant que les dimensions s'additionnent et que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

(e) Montrer que E_1 et E_2 sont stables par B, c'est-à-dire que $B(E_1) \subset E_1$ et $B(E_2) \subset E_2$.

6. Changement de base.

(a) Dans E_1, choisir $e_2 \notin \ker(B - 3I_3)$ et poser $e_1 = (B - 3I_3)e_2$. Vérifier que (e_1, e_2) est une base de E_1, puis calculer Be_1 et Be_2.

(b) Écrire la matrice T de B dans la base (e_1, e_2, e_3) (c'est-à-dire la matrice T telle que $B = PTP^{-1}$ où P est la matrice de passage). Vérifier que T est triangulaire supérieure.

7. Calcul de T^n.

(a) Poser $N = T - 3I_3$. Calculer N, N^2 et N^3. Que constate-t-on ?

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$T^n = \begin{pmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

(c) Calculer T^n explicitement. Vérifier pour $n = 1$.

8. Retour à B^n.

(a) Écrire explicitement la matrice de passage P (dont les colonnes sont e_1, e_2, e_3) et calculer P^{-1}.

(b) Justifier que $B^n = PT^nP^{-1}$ et calculer B^n explicitement.

(c) Vérifier pour $n = 1$.

Problème III – Produit scalaire et polynômes orthogonaux

On note $\mathbb{R}[t]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[t]$ le sous-espace des polynômes de degré au plus n.

Rappel. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes, pour tous $u, v, w \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- *Symétrie :* $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$,
- *Linéarité par rapport au premier argument :* $\varphi(u + \lambda v,\, w) = \varphi(u, w) + \lambda\, \varphi(v, w)$,
- *Positivité :* $\varphi(u, u) \geq 0$,
- *Séparation :* $\varphi(u, u) = 0 \implies u = 0$.

Un espace muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien.**

On définit sur $\mathbb{R}[t]$ la forme bilinéaire suivante : pour deux polynômes P et Q,

$$\langle P,\, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, dt.$$

On dit que P et Q sont **orthogonaux** si $\langle P,\, Q\rangle = 0$. On note $\|P\|^2 = \langle P,\, P\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\, dt$, et $\|P\|$ la **norme** de P.

1. Vérification. Montrer que $\langle \cdot,\, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[t]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Premiers calculs. Calculer $\langle 1,\, 1\rangle$, $\langle 1,\, t\rangle$, $\langle t,\, t\rangle$, $\langle 1,\, t^2\rangle$ et $\langle t,\, t^2\rangle$.

3. Construction d'une famille orthogonale.
On va construire des polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 deux à deux orthogonaux, avec $\deg P_k = k$.

(a) Poser $P_0 = 1$. Calculer $\|P_0\|^2$.

(b) On cherche $P_1 = t + \alpha$ orthogonal à P_0. Calculer α et en déduire P_1. Calculer $\|P_1\|^2$.

(c) On cherche $P_2 = t^2 + \beta t + \gamma$ orthogonal à P_0 et à P_1. Écrire les deux conditions d'orthogonalité, en déduire β et γ, et calculer P_2 et $\|P_2\|^2$.

(d) On cherche $P_3 = t^3 + at^2 + bt + c$ orthogonal à P_0, P_1 et P_2. Écrire les trois conditions d'orthogonalité, en déduire P_3 et $\|P_3\|^2$.

4. Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[t]$.

5. Projection orthogonale.
On appelle *projection orthogonale* de t^3 sur $\mathbb{R}_2[t]$ le polynôme

$$\widehat{t^3} = \frac{\langle t^3,\, P_0\rangle}{\|P_0\|^2}\, P_0 + \frac{\langle t^3,\, P_1\rangle}{\|P_1\|^2}\, P_1 + \frac{\langle t^3,\, P_2\rangle}{\|P_2\|^2}\, P_2.$$

(a) Calculer $\widehat{t^3}$.

(b) Vérifier que $t^3 - \widehat{t^3}$ est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_2[t]$.

6. Meilleure approximation.
Soit $Q \in \mathbb{R}_2[t]$ quelconque. Montrer que

$$\|t^3 - Q\|^2 \geq \|t^3 - \widehat{t^3}\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $Q = \widehat{t^3}$.

7. Égalité de Parseval.
Soit $f \in \mathbb{R}_3[t]$. En décomposant f dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3), montrer que

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\langle f,\, P_k\rangle^2}{\|P_k\|^2} = \|f\|^2.$$

8. Application. Calculer $\|t^3 - \widehat{t^3}\|$.

Problème IV – Équation fonctionnelle intégrale

On rappelle que le **cosinus hyperbolique** est la fonction ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, et le **sinus hyperbolique** par $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. On a $\mathrm{ch}(0) = 1$, $\mathrm{sh}(0) = 0$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **continues, non identiquement nulles**, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)\, f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt. \tag{$\mathcal{E}$}$$

Partie A – Premières propriétés

1. Substituer $x = y = 0$ dans $(\mathcal{E})$ et en déduire la valeur de $f(0)$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est impaire.

4. Différencier $(\mathcal{E})$ par rapport à y. En déduire la valeur de $f'(0)$.

5. Différencier à nouveau l'équation obtenue à la question 4 par rapport à y, puis effectuer la même démarche en dérivant par rapport à x. En combinant les deux résultats, montrer que f vérifie une équation de la forme

$$f''(x) + \omega\, f(x) = 0,$$

où ω est une constante que l'on exprimera en fonction de f.

Partie B – Résolution selon le signe de ω

6. Cas $\omega = 0$.

(a) Résoudre $f'' = 0$ avec les conditions initiales de la Partie A. Trouver f explicitement.

(b) Vérifier que cette fonction satisfait $(\mathcal{E})$.

7. Cas $\omega > 0$. On pose $\omega = \lambda^2$ avec $\lambda > 0$.

(a) Résoudre l'équation $f'' + \lambda^2 f = 0$ en général.

(b) Appliquer les conditions initiales établies en Partie A pour obtenir f explicitement.

8. Cas $\omega < 0$. On pose $\omega = -\mu^2$ avec $\mu > 0$.

(a) Résoudre l'équation $f'' - \mu^2 f = 0$ en général.

(b) Appliquer les conditions initiales établies en Partie A pour obtenir f explicitement. On exprimera le résultat avec la fonction sh.

Partie C – Vérification et conclusion

9. Vérification du cas $\omega = 0$. Vérifier que $f_0(x) = 2x$ satisfait $(\mathcal{E})$.

10. Vérification du cas $\omega > 0$. Vérifier que $f_\lambda(x) = \dfrac{2}{\lambda}\sin(\lambda x)$ satisfait $(\mathcal{E})$.

11. Vérification du cas $\omega < 0$. Vérifier que $f_\mu(x) = \dfrac{2}{\mu}\,\mathrm{sh}(\mu x)$ satisfait $(\mathcal{E})$.

12. Conclusion. Lister toutes les fonctions continues non identiquement nulles solutions de $(\mathcal{E})$.