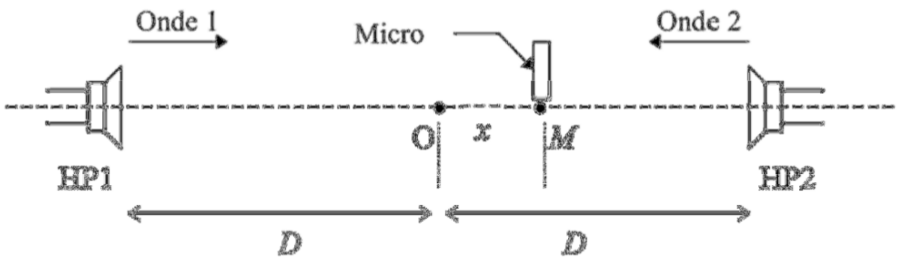
Concours interne : Physique (3h)

Juin 2022

- Ce devoir est composé de 3 exercices **indépendants**. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
- **Changer de page** au début de chaque exercice.
- Penser à **numéroter** les copies.
- L'argumentation des réponses devra être **précise**, **concise** et **rigoureuse**.
- Toute application numérique non suivie d'une **unité correcte** sera comptée fausse.
- Les résultats littéraux demandés par l'énoncé seront **encadrés** et les applications numériques **soulignées**.

I Interférences de 2 ondes sonores frontales



Dans le montage ci-dessus, les deux haut-parleurs, notés HP1 et HP2 et séparés de la distance $2D$, sont alimentés en parallèle par une même tension électrique : les deux sources sonores émettent donc des vibrations $p_i(x,t)$ sinusoïdales de même fréquence f, même longueur d'onde λ, même phase à l'origine φ_0 et même amplitude P_0. On considère que les ondes sonores se propagent sans déformation ni atténuation à la célérité c constante.

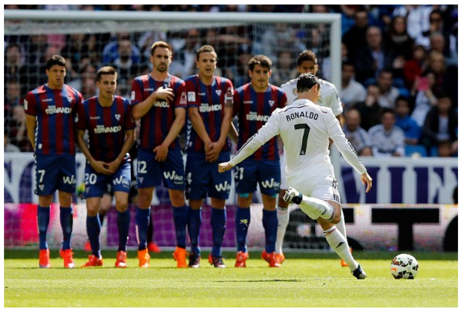
1. A quoi ressembleraient les spectres de Fourier en amplitude des signaux émis par les haut parleurs.
2. Une onde sonore est elle transversale ou longitudinale ? mécanique ou électromagnétique ? (Justifier)
3. Citer le domaine des fréquences sonores audibles.
4. Donner la relation entre c, f, et λ.

L'axe (Ox) passe par le centre des haut-parleurs. Les deux ondes arrivent dans un microphone de petite taille situé au point M d'abscisse x qui peut être déplacé le long de (Ox) sans perturber le signal. On envoie sur un oscilloscope le signal du générateur alimentant les deux haut-parleurs et la tension u délivrée par le micro.

Lorsqu'on déplace le micro autour de la position médiane entre les haut-parleurs, soit $x = 0$, on observe que l'amplitude de la tension u varie et passe successivement par des minima quasiment nuls et des maxima, l'écart d entre deux position pour lesquelles l'amplitude est maximale étant constant.

5. Quel phénomène ces observations évoquent-elles ?
6. Exprimer la différence de marche δ qui existe entre les deux ondes, arrivant dans le microphone.
7. On étudie maintenant la superposition des deux ondes au niveau du haut parleurs.
   (a) Dans le cas des interférences *constructives* que vaudrait l'amplitude de l'onde sonore résultante au point M ? et dans le cas *destructives* ?
   (b) Dans le cas des interférences *constructives* rappeler la relation entre la différence de marche δ et la longueur d'onde λ.
   (c) En déduire les positions x_n, en fonction d'un entier n, pour lesquelles les ondes interfèrent constructivement.
   (d) Exprimer la distance d entre deux maxima successifs d'intensité sonore en fonction de λ.
8. Expérimentalement on trouve $d = 21,2$ cm pour une fréquence sonore $f = 800$ Hz. En déduire la valeur de la célérité du son dans l'air pour cette expérience.

II Coups-francs



On s'intéresse dans cet exercice à l'étude simplifiée de tirs de coups-francs au football. Les coups francs sont accordés pour sanctionner les fautes et comportements antisportifs définis par la Loi 12 du football. Ils peuvent être directs (fautes avec contact physique ou manque de respect envers d'autres joueurs) ou indirects (fautes sans contact physique, notamment celles des gardiens). Pour le coup franc direct comme pour le coup franc indirect, le ballon doit être immobile au moment de la frappe, et l'exécutant ne doit pas toucher le ballon une seconde fois avant que celui-ci n'ait été touché par un autre joueur.

On considère un joueur face au but, tirant dans un ballon situé à une distance $D = 30$ m du but. Le but est un cadre rectangulaire de 7 mètres 32 de large sur $H = 2,44$ m de haut. Dans cette étude, on pourra considérer le ballon comme ponctuel, de masse m. En tirant, le joueur impose à la balle une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, de norme v_0 et faisant un angle α avec l'horizontale. Il tire au milieu des cage (dans le sens de la largeur) mais peut varier la vitesse et l'angle du tir pour viser plus ou moins haut.

Le match a lieu sur Terre où l'accélération de pesanteur est verticale descendante, de norme $g = 9,81$ m.s^{-2} et on néglige les forces de frottements fluides de l'air.

1. Rappeler l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans un repère cartésien $(Oxyz)$.
2. Donner la définition du vecteur vitesse instantanée $\overrightarrow{v}$ en fonction du vecteur position puis relier les expressions de ses composantes à celles du vecteur position.
3. Même question pour le vecteur accélération instantanée $\overrightarrow{a}$.

On s'intéresse désormais à la modélisation du coup-franc.

4. Faire un schéma vu de coté en représentant un repérage cartésien plan (Oxz) adapté au problème, avec origine au ballon. On représentera le but par une barre de hauteur H.
5. Établir l'équation du mouvement du ballon lors du tir (application du PFD).
6. En déduire les equations horaires $x(t)$ et $z(t)$ de ce mouvement.
7. Déterminer l'équation de la trajectoire et montrer que
$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$
.
8. Établir l'expression de la portée p du tir, de l'altitude maximale atteinte z_m ainsi que de l'abscisse x_m à laquelle elle est atteinte, en fonction de v_0, α et g. Vérifier l'homogénéité du résultat obtenu pour la portée.
9. Pour quelle valeur de α la portée est-elle maximale ? Quelle est alors son expression ?
10. Même question pour l'altitude maximale.

On suppose que le joueur tire avec un angle $\alpha = 30^\circ$.

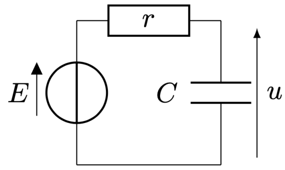
11. Quelle doit-être la vitesse minimale $v_{0,\text{min}}$ pour que le ballon atteigne directement le but ? Calculer sa valeur numérique dans le système international.

III Supercondensateurs

On considère une condensateur de capacité C, initialement déchargé, aux bornes duquel on branche, à l'instant $t = 0$, un générateur de tension de force électromotrice E et de résistance interne r.

1. Après avoir repris le schéma en introduisant les grandeurs utiles, à l'aide de la loi des mailles et des lois caractéristique d'un condensateur et d'une résistance, montrer que la tension u aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle (on introduira un temps caractéristique τ qui s'exprime en fonction de r et C.) :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{rC}u = \frac{E}{rC}$$

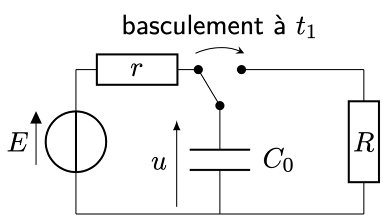


2. Après avoir précisé les conditions initiales, résoudre cette équation et déterminer l'expression de $u(t)$.
3. En déduire, à l'aide de la loi caractéristique du condensateur, l'expression de l'intensité $i(t)$ traversant le condensateur. Cette grandeur est-elle continue ? Retrouver les valeurs de $i(t = 0^+)$ et $i(t = 0^-)$ à l'aide de la loi des mailles.
4. Tracer l'allure de $u(t)$ et de $i(t)$ en faisant apparaitre les paramètres pertinents et en précisant la durée pour atteindre le régime permanent.
5. L'énergie électrostatique $\mathcal{E}_{\text{él}}$ stockée dans un condensateur de capacité C_0 de tension à ses bornes U_0 se calcule à l'aide de la formule
$$\mathcal{E}_{\text{él}} = \frac{1}{2}C_0U_0^2$$
En déduire la capacité C_0 nécessaire pour stocker une énergie de $\mathcal{E}_0 = 100$ MJ pour une tension aux bornes du condensateur valant $U_0 = 500$ V.

Pour stocker une telle énergie, on dispose en pratique de condensateurs de capacité $C_1 = 3200$ F. Ces derniers ne peuvent cependant accepter qu'une tension maximale $U_1 = 2,5$ V à leurs bornes.

6. Montrer, en vous appuyant sur l'exemple de deux condensateurs, que les capacités se somment en parallèle et que leurs inverses se somment en série.
7. Combien de ces condensateurs faut-il mettre en série pour que l'ensemble supporte la tension U_0 ? On notera p ce nombre entier. Que vaudra alors la capacité C_p équivalente à la mise en série de ces p condensateurs C_1 ?
8. Pour atteindre la capacité C_0 déterminée précédemment, combien de capacités C_p faudra-t-il placer en parallèle ? On notera q ce nombre entier. En déduire le nombre n de condensateurs de capacité C_1 nécessaires pour stocker l'énergie $\mathcal{E}_0$.

Dans la suite, on appellera “module” cette association en série puis en parallèle de n capacités C_1. Sa capacité vaut donc C_0. . Les modules peuvent, entre autre, être utilisés pour alimenter des appareils électriques. On souhaite ici étudier un cycle de charge incomplète puis de décharge du module dans l'appareil :



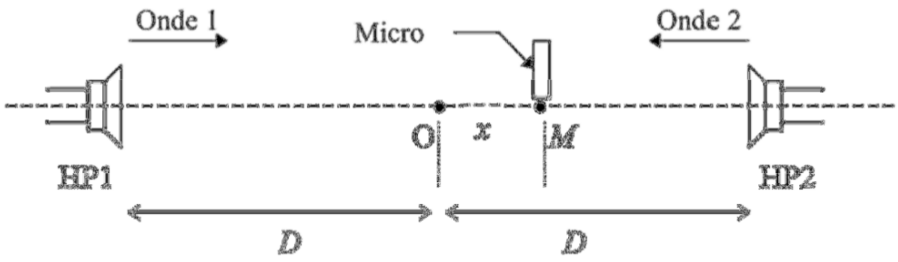
- initialement déchargé, on charge partiellement le module à l'aide d'un générateur de tension réel ($E = 500$ V, $r = 10$ Ω) entre $t = 0$ et t_1, instant auquel la tension atteint $u(t_1) = \frac{3}{4}E$.
- à l'instant t_1, le module partiellement chargé est débranché du générateur et relié à l'appareil électrique, assimilé à une résistance $R = 20$ Ω.

9. Déterminer l'expression de t_1 en fonction de $\tau = rC_0$.
10. Établir l'expression de la tension $u(t)$ aux bornes du module pour $t > t_1$. On introduira un second temps caractéristique τ'.
11. Tracer l'allure de la tension $u(t)$ entre $t = 0$ et $t = t_1 + 2\tau'$.

Test d'admission : Physique (3h)

Juin 2022

I Interférences de 2 ondes sonores frontales



1. Etant des signaux sinusoïdaux le spectres de Fourir en amplitude serait celui d'un son pur à savoir une seule fréquence f d'amplitude P_0 (une seule barre).
2. Une onde sonore est longitudinale car la perturbation (surpression) et parallèle à la direction de propagation de l'onde. C'est une onde mécanique car besoin d'un milieu matériel pour se propager.
3. Les fréquences sonores audibles sont les $f \in [20 \text{ Hz} ; 20 \text{ kHz}]$.
4. $\boxed{c = f\lambda}$.

L'axe (Ox) passe par le centre des haut-parleurs. Les deux ondes arrivent dans un microphone de petite taille situé au point M d'abscisse x qui peut être déplacé le long de (Ox) sans perturber le signal. On envoie sur un oscilloscope le signal du générateur alimentant les deux haut-parleurs et la tension u délivrée par le micro.

Lorsqu'on déplace le micro autour de la position médiane entre les haut-parleurs, soit $x = 0$, on observe que l'amplitude de la tension u varie et passe successivement par des minima quasiment nuls et des maxima, l'écart d entre deux position pour lesquelles l'amplitude est maximale étant constant.

5. Ces observations sont caractéristiques du phénomène d'interférences de 2 ondes (tout particulièrement ici des ondes stationnaire)
6. $\boxed{\delta = MH_1 - MH_2 = D + x - (D - x) = 2x}$
7. On étudie maintenant la superposition des deux ondes au niveau du haut parleurs.
   (a) Dans le cas des interférences *constructives* les amplitudes se somment au point M $\boxed{A = A_1 + A_2 = 2P_0}$
   Dans le cas des interférences *destructives* ils se soustraient au point M $\boxed{A = A_1 - A_2 = 0}$
   (b) Dans le cas des interférences *constructives* $\boxed{\delta = n\lambda}$ avec $n \in \mathbb{Z}$
   (c) Les positions x_n pour lesquelles les ondes interfèrent constructivement vérifient $2x_n = n\lambda \Longrightarrow \boxed{x_n = n\frac{\lambda}{2}}$
   (d) Exprimer la distance d entre deux maxima successifs sont situé en x_n et x_{n+1} donc on a

$$d = x_{n+1} - x_n \Leftrightarrow d = (n+1)\frac{\lambda}{2} - n\frac{\lambda}{2}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{d = \frac{\lambda}{2}}$$

8. En injectant d dans la formule de la célérité , il vient :

$$\boxed{c = 2df}$$

A.N : : $c = 2 \times 21,2.10^{-2} \times 800 = 339 \text{m.s}^{-1}$

Cette valeur est cohérente avec les valeurs attendues pour le son dans l'air aux T et P usuelles.

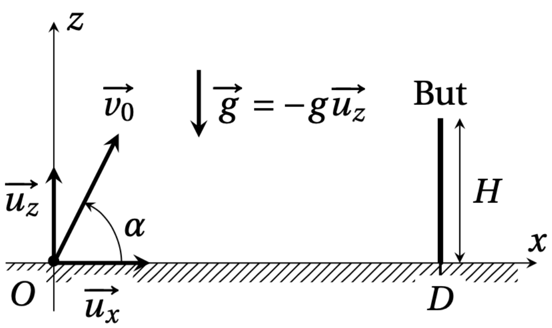
II Coups-francs

1. $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y} + z(t)\,\overrightarrow{u_z}}$ où (x, y, z) sont les coordonnées du point M dans le repère.

2. Par définition, $\boxed{\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}} = v_x\,\overrightarrow{u_z} + v_y\,\overrightarrow{u_y} + v_z\,\overrightarrow{u_z}$. En dérivant $\overrightarrow{OM}(t)$, on obtient $\overrightarrow{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$. On identifie les composantes : $\boxed{v_x = \dot{x},\ v_y = \dot{y} \text{ et } v_z = \dot{z}.}$

3. Par définition, $\boxed{\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}} = a_x\,\overrightarrow{u_x} + a_y\,\overrightarrow{u_y} + a_z\,\overrightarrow{u_z}$. En dérivant, on obtient $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$. On identifie les composantes : $\boxed{a_x = \ddot{x},\ a_y = \ddot{y} \text{ et } a_z = \ddot{z}.}$

4. Voir le schéma ci-contre. Dans ce repère, $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$ et la vitesse initiale s'écrit $\boxed{\overrightarrow{v} = v_0\cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + v_0\sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}.}$



5. Système : ballon assimilé à un point matériel $M(x, y, z)$. Référentiel : terrestre local, supposé galiléen. Bilan des forces : le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$.
On applique le PFD : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P}$ donc $\boxed{\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}.}$

6. On projette : $\left|\begin{array}{l} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{array}\right. \underset{\int_0^t \mathrm{d}t}{\Rightarrow} \left|\begin{array}{l} v_x(t) = 0 + v_{x0} = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = 0 + v_{y0} = 0 \\ v_z(t) = -gt + v_{z0} = -gt + v_0\sin\alpha \end{array}\right. \underset{\int_0^t \mathrm{d}t}{\Rightarrow} \left|\begin{array}{ll} x(t) & = v_0\cos\alpha t + x_0 = v_0\cos\alpha t \\ y(t) & = 0 + y_0 = 0 \\ z(t) & = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t + z_0 \\ & = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t \end{array}\right.$

On trouve $\boxed{x(t) = v_0\cos(\alpha)t}$ et $\boxed{z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t.}$

7. On remplace $t = x/(v_0\cos\alpha)$ dans l'expression de $z(t)$: $\boxed{z(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha.}$

8. • La portée p correspond à la distance parcourue par la balle lorsqu'elle touche à nouveau le sol.
On cherche $z(p) = 0 \Leftrightarrow p\left(\tan\alpha - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}p\right) = 0 \Rightarrow \boxed{p =} \dfrac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g} = \dfrac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} \boxed{= \dfrac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}}.$
On a bien $[p] = \dfrac{[v]^2}{[g]} = \dfrac{\mathbf{L^2.T^{-2}}}{\mathbf{L.T}^{-2}} = \mathbf{L}$.
• On trouve le maximum de la trajectoire $z(x)$ en cherchant l'annulation de sa dérivée : $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \tan\alpha - \dfrac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x$ qui s'annule en $\boxed{x_m = \dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \dfrac{p}{2}.}$ L'altitude à cette position vaut $\boxed{z_m = z(x_m) = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.}$

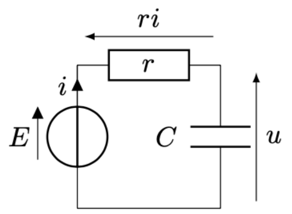
9. La portée est maximale lorsque $\sin(2\alpha) = 1$, c'est-à-dire pour $2\alpha = \pi/2$ donc $\boxed{\alpha = \pi/4.}$ Elle vaut alors $\boxed{p = \dfrac{v_0^2}{g}.}$

10. L'altitude est maximale pour $\sin^2\alpha = 1$ donc $\boxed{\alpha = \pi/2.}$ Elle vaut alors $\boxed{z_m = \dfrac{v_0^2}{2g}.}$

11. Le ballon atteint directement le but si $\boxed{p = D.}$ On trouve alors $\boxed{v_{0,\min} = \sqrt{\dfrac{gD}{\sin(2\alpha)}}}$ $\underline{= 1,8.10^1\ \mathrm{m.s^{-1}}.}$

III Supercondensateurs

1. On introduit le courant i en convention générateur puis la tension $\boxed{u_r = ri}$ aux bornes de la résistance. Comme la tension u aux bornes de la capacité est en convention récepteur, la caractéristique s'écrit $\boxed{i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.}$ La loi des mailles donne $E = ri + u$ pour $t \geqslant 0$. On obtient l'équation différentielle : $\boxed{E = \tau\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u}$ où on a introduit le temps caractéristique $\boxed{\tau = rC.}$

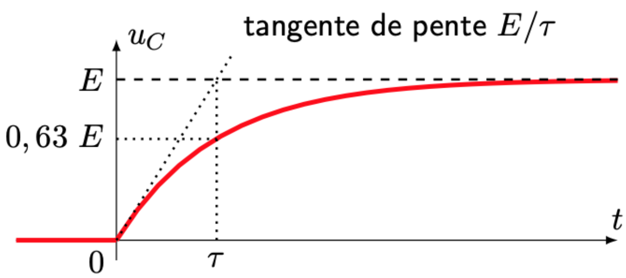


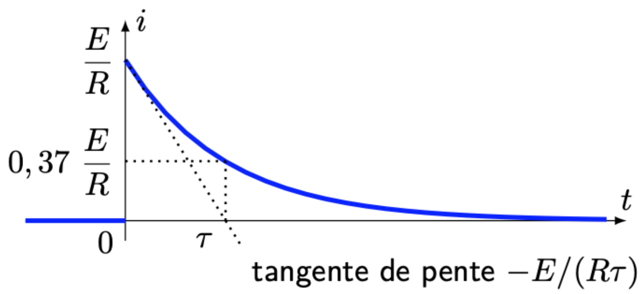
2. La tension au bornes d'un condensateur est une grandeur <u>continue</u>. L'énoncé indique que le condensateur est initialement déchargé, donc $u(t<0) = 0$. Par continuité, on obtient $\boxed{u(t = 0^+) = 0.}$ On ne peut a priori rien dire sur la dérivée de u. Résolvons l'équation différentielle pour $t > 0$:
(SP) : $u_p(t) = E$ fonctionne pour $t > 0$. **(SGH)** : $u_h(t) = Ae^{-t/\tau}$. **(SC)** : $u(t) = E + Ae^{-t/\tau}$.
(CI) : $u(0^+) = E + A \overset{\text{c.i.}}{=} 0$ donc $A = -E$. Finalement, $\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$ pour $t \geqslant 0$.

3. Caractéristique du condensateur : $\boxed{i =} C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -C\dfrac{E}{-\tau}e^{-t/\tau} \boxed{= \dfrac{E}{R}e^{-t/\tau}}$ pour $t \geqslant 0$ et $i(t<0) = 0$.

   À $t = 0^-$, la ldm donne $0 = ri(0^-) + u(0^-)$ donc $\boxed{i(0^-) = 0.}$ À $t = 0^+$: $E = ri(0^+) + u(0^+)$ donc $\boxed{i(0^+) = \dfrac{E}{R}.}$

4. Le régime permanent est atteint au bout d'<u>environ 5τ</u>.



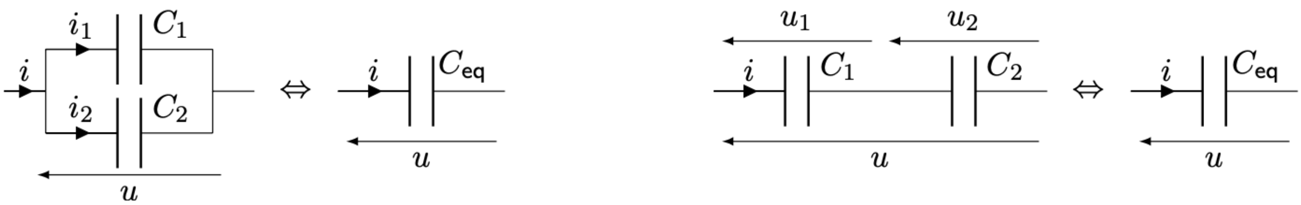


5. La puissance reçue par un condensateur s'écrit $\mathcal{P}_{\text{reçue}} = ui = uC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)$. On identifie l'énergie électrostatique stockée dans le condensateur $\boxed{\mathcal{E}_{\text{él}} = \dfrac{1}{2}Cu^2.}$

   Pour stocker une énergie $\mathcal{E}_0 = 100$ MJ avec une tension $U_0 = 500$ V, il faut une capacité $\boxed{C_0 = \dfrac{2\mathcal{E}_0}{U_0^2}}$ <u>= 800 F</u>.

6. • On considère deux condensateur de capacités C_1 et C_2 en parallèle. La tension u à leurs bornes est identique, on note $i_1 = C_1\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ et $i_2 = C_2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ les courants respectifs. La loi des nœuds donne $i = i_1 + i_2 = (C_1 + C_2)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ qui serait la caractéristique d'un unique condensateur de capacité $\boxed{C_{\text{eq}}^{\text{para}} = C_1 + C_2.}$

   • On considère deux condensateur de capacités C_1 et C_2 en série. Le courant i qui les parcourt est identique, on note u_1 et u_2 les tensions respectives. On a donc $i = C_1\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ et $i = C_2\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$. La loi des mailles donne $u = u_1 + u_2$ donc $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{C_1} + \dfrac{i}{C_2}$ qui serait la caractéristique d'un unique condensateur de capacité $\boxed{C_{\text{eq}}^{\text{série}} = \dfrac{1}{1/C_1 + 1/C_2}.}$



7. En supposant que la tension aux bornes de chaque condensateur vaut U_1, on doit mettre $\underline{p = \frac{U_0}{U_1} = 200}$ condensateurs en série. La capacité équivalente vérifie $\frac{1}{C_p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{C_1} = \frac{p}{C_1}$ donc $\boxed{C_p = \frac{C_1}{p}}\ \underline{= 16\text{ F}}$.

8. Il faudra mettre $q = \frac{C_0}{C_p} = 50$ capacités C_p en parallèle pour atteindre C_0. Le nombre de condensateurs C_1 total vaut donc $\underline{n = p \times q = 10^4}$.

9. La charge a déjà été étudiée, on a $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$. On cherche t_1 tel que $E(1 - e^{-t_1/\tau}) = \frac{3}{4}E$ donc $e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln 4.}$

10. Pour $t > t_1$, le module se décharge dans la résistance R. La loi des mailles donne $0 = u + Ri$ avec $i = C_0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. En introduisant $\tau' = RC_0$, on obtient $\boxed{\tau' \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0.}$

    (SC)=(SGH) : $u(t) = Ae^{-t/\tau}$ pour $t > t_1$. **(CI)** : $u(t_1^+) = u(t_1^-) = \frac{3}{4}E \overset{\text{C.I.}}{=} Ae^{-t_1/\tau}$ donc $A = \frac{3}{4}Ee^{t_1/\tau}$. Finalement, $\boxed{u(t > t_1) = \frac{3}{4}Ee^{-(t-t_1)/\tau}.}$

11. Avec les valeurs numériques, on a $\tau' = 2\tau$ et $t_1 = 1,4\ \tau$.