ECOLE DES INGÉNIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ECOLE SUPÉRIEURE DU GÉNIE URBAIN

Durée : 3 heures

TEST 2022

Exercice 1

Les deux partie I et II sont indépendantes.
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Partie I

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1, 2, -1)$ et de vecteur directeur : $\vec{u} = (2, -3, 5)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 6z + 5 = 0$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$.

Partie II

1. Déterminer l'équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(4, 2, -3)$ et de rayon 5.
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan $\Delta = (O, \vec{i}, \vec{j})$
3. Déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ et de la droite $\Lambda = (O, \vec{k})$.

Exercice 2

On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^e x\, dx$ et pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\, dx$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 2I_n + nI_{n-1} = e^2$
Calculer I_2.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire l'encadrement : $\dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$
5. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Exercice 3

On considère l'application f de $\mathbb{C} - \{3\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \dfrac{1-3z}{3-z}$.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.
2. On considère dans le plan complexe le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
a) Quel est l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel ? Le représenter
b) Quel est l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur ? Le représenter.

Durée : 3 heures

Corrigé du TEST 2022

Exercice 1

Partie I

On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(1,2,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (2,-3,5)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 6z + 5 = 0$. On veut déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$.

Traduisons qu'un point $M(x,y,z)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ y-2 = -3t \\ z+1 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = -1+5t \end{cases}$$

ces trois égalités constituent une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

A chaque valeur de t correspond un point M de la droite et inversement.

Un point M appartient à l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{D}$ si et seulement si les coordonnées (x,y,z) vérifient :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = -1+5t \\ 2x - y + 6z + 5 = 0 \quad (4) \end{cases}$$

En remplace dans l'équation (4) x, y et z en fonction de t ; on obtient :

$2(1+2t) - (2-3t) + 6(-1+5t) + 5 = 0 \Leftrightarrow 2 + 4t - 2 + 3t - 6 + 30t + 5 = 0$

D'où : $37t = 1$ donc $t = \dfrac{1}{37}$

On remplace t par cette valeur dans les trois autres équations ; on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{39}{37} \\ y = \dfrac{71}{37} \\ z = -\dfrac{32}{37} \end{cases}$$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ ont donc pour seul point d'intersection ; le point $M\left(\dfrac{39}{37}, \dfrac{71}{37}, -\dfrac{32}{37}\right)$.

Partie II

1. On détermine l'équation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(4,2,-3)$ et de rayon 5.

D'après le cours cette équation est donnée par : $(x-4)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=25$ et donc l'équation cartésienne de cette sphère est : $x^2+y^2+z^2-8x-4y+6z+4=0$.

2. On va déterminer l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan $\Delta=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$

L'équation de ce plan $z=0$.

L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan Δ est donc l'ensemble des points $M(x,y,z)$ dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+z^2-8x-4y+6z+4=0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} z=0 \\ (x-4)^2+(y-2)^2=16 \end{cases}$$

Soit I le point de coordonnées $(4,2,0)$; soit M le point de coordonnées $(x,y,0)$ alors $(x-4)^2+(y-2)^2=16$, l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan Δ est donc le cercle du plan $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ de centre I et de rayon 4.

3. Déterminons maintenant l'intersection de $\mathcal{S}$ et de la droite $\Lambda=(O,\overrightarrow{k})$.

Les équations de la droite Λ sont $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

L'intersection de la droite Λ et de la sphère $\mathcal{S}$ est donc l'ensemble des points $M(x,y,z)$ dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x^2+y^2+z^2-8x-4y+6z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z^2+6z+4=0 \quad (3) \end{cases}$$

L'équation (3) a deux solutions $z=-3-\sqrt{5}$ et $-3+\sqrt{5}$

La sphère $\mathcal{S}$ et la droite Λ ont donc deux point communs :

$$I\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3-\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ et } J\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. On va calculer I_0 et I_1.

Une primitive de la fonction $x\longmapsto x$ est $x\longmapsto \dfrac{x^2}{2}$, d'où $I_0=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}$. Pour I_1 on utilise une intégration par parties.

on a $I_1=\displaystyle\int_1^e x\ln x\ dx$.

Posons :

$$u'(x)=x \qquad u(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$v(x)=\ln x \qquad v'(x)=\frac{1}{x}.$$

$$I_1=\int_1^e x\ln x\ dx=\int_1^e u'(x)v(x)\ dx=[u(x)v(x)]_1^e-\int_1^e u(x)v'(x)\ dx$$

d'où on déduit que : $I_1=\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{2}$

2. Démontrons la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_n + nI_{n-1} = e^2 \qquad (1)$
Faisons une intégration par parties :

$u'(x) = x \qquad\qquad u(x) = \dfrac{x^2}{2}$

$v(x) = (\ln x)^n \qquad\qquad v'(x) = n(\ln x)^{n-1}\ \dfrac{1}{x}$

D'où :

$$I_n = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^n\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\ dx = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^n\right]_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x(\ln x)^{n-1}\ \frac{1}{x}\ dx$$

On reconnait : $\displaystyle\int_1^e x(\ln x)^{n-1}\ dx$, d'où : $I_n = \left(\dfrac{e^2}{2}(\ln e)^n\right) - 0 - \dfrac{n}{2}I_{n-1} = \dfrac{e^2}{2} \times 1 - \dfrac{n}{2}I_{n-1}$

Donc : $I_n + \dfrac{n}{2}I_{n-1} = \dfrac{1}{2}e^2$, en multipliant par 2 on obtient la relation : $2I_n + nI_{n-1} = e^2$.

Utilisons cette relation pour $n = 2$: $2I_2 + 2I_1 = e^2 \Rightarrow I_2 = \dfrac{1}{4}e^2 - \dfrac{1}{4}$

3. Montrons que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Calculons pour cela : $I_{n+1} - I_n$.

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e x(\ln x)^{n+1}\ dx - \int_1^e x(\ln x)^n\ dx = \int_1^e x(\ln x)^n(\ln x - 1)\ dx$$

or sur l'intervalle $[1, e]$, $\ln x \leq 1$, donc $x(\ln x)^n(\ln x - 1) \leq 0$ et par conséquent : $I_{n+1} - I_n \leq 0$. La suite est donc décroissante.

4. Pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq I_n \leq I_{n-1}$, donc $2I_n + nI_{n-1} \geq 2I_n + nI_n$, soit $2I_n + nI_{n-1} \geq (2+n)I_n$, or $2I_n + nI_{n-1} = e^2$, donc $(2+n)I_n \leq e^2$ et donc :

$I_n \leq \dfrac{e^2}{2+n} \qquad (2)$

D'autre part on peut écrire la relation (1) à l'ordre $n+1$ ce qui donne :
$2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$, la suite (I_n) étant décroissante : $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ On peut donc écrire :

$2I_{n+1} + (n+1)I_n \leq 2I_n + (n+1)I_n = (n+3)I_n$, d'où : $e^2 \leq (n+3)I_n$, soit $I_n \geq \dfrac{e^2}{(n+3)}$.

La relation (2) et cette dernière relation prouve que : $\dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$

5. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^2}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^2}{n+2} = 0$ et d'après le théorème des gendarmes on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. On prend la double inégalité démontrée $\dfrac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \dfrac{e^2}{n+2}$ et multiplions par n les trois membres on obtient : $\dfrac{ne^2}{n+3} \leq nI_n \leq \dfrac{ne^2}{n+2}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{ne^2}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^2}{n+2} = e^2$, d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = e^2$.

Exercice 3

$f(z) = \dfrac{1-3z}{3-z}$, posons $z = x + iy$

1. $f(z) = \dfrac{1-3(x+iy)}{3-(x+iy)}$, multiplions par le complexe conjugué du dénominateur les deux parties de la fraction (le complexe conjugué du dénominateur est $(3-x)+iy$) :

$$f(z)=\frac{1-3(x+iy)}{3-(x+iy)}\times\frac{(3-x)+iy}{(3-x)+iy}=\frac{3x^2+3y^2-10x+3}{(3-x)^2+y^2}+i\frac{-8y}{(3-x)^2+y^2}$$

D'où : $\Re e\ (f(z))=\dfrac{3x^2+3y^2-10x+3}{(3-x)^2+y^2}$ et $Im(f(z))=\dfrac{-8y}{(3-x)^2+y^2}$.

2. $a)$ $f(z)$ réel $\Leftrightarrow Im(f(z))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x,y)\neq(3,0)\end{cases}$

L'ensemble E est donc l'axe des "x" privé du point $(3,0)$.

$b)$ $f(z)$ imaginaire pur $\Leftrightarrow \Re e(f(z))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-\frac{10}{3}x+1=0 \\ (x,y)\neq(3,0)\end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{16}{9} \\ (x,y)\neq(3,0)\end{cases}$

L'ensemble F est donc le cercle de centre $\left(\dfrac{5}{3},0\right)$ et de rayon $\dfrac{4}{3}$ privé du point $(3,0)$.